ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN HUẤN

PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN 05/2017

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài:

Đa thức lượng giác có vị trí rất quan trọng trong Toán học vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của lượng giác mà còn là một công cụ đắc lực của Giải tích trong lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn, lý thuyết nội suy,... và trong khảo sát phương trình và các bài toán cực trị. Ngoài ra, đa thức lượng giác còn được sử dụng nhiều trong tính toán và ứng dụng. Trong các kỳ thi học sinh giỏi toán quốc gia và Olympic toán quốc tế thì các bài toán về đa thức lượng giác cũng thường được đề cập đến và được ẩn dưới dạng áp dụng công cụ lượng giác nên thường là bài toán khó của bậc phổ thông.

2. Lịch sử nghiên cứu:

Tuy nhiên cho đến nay, các tài liệu về đa thức lượng giác và các phương pháp lượng giác chưa đề cập đầy đủ. Vì vậy, việc khảo sát sâu hơn về các vấn đề về biện luận nghiệm, biểu diễn đa thức lượng giác cho ta hiểu sâu sắc hơn các tính chất của đa thức đã cho và định hướng giải quyết nhiều dạng toán liên quan.

3. Mục đích nghiên cứu, luận điểm cơ bản của luận văn:

Luận văn “Phương trình đa thức lượng giác và một số dạng toán liên quan” trình bày một số vấn đề liên quan đến bài toán xác định số nghiệm thực của đa thức lượng giác với hệ số thực.

Mục đích của luận văn nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của Giải tích và đại số trong khảo sát nghiệm thực của đa thức lượng giác.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Đọc và dịch tài liệu có liên quan đến đề tài.
- Trao đổi thảo luận với Thầy hướng dẫn, với bạn bè, với các chuyên gia.
- Thường xuyên phản biện để đi đến kết quả tốt nhất.

5. Bố cục của luận văn:

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 3 chương.
Chương 1. Các tính chất cơ bản liên quan đến đa thức lượng giác.
Chương 2. Các tính chất nghiệm của đa thức lượng giác.
Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

Trong chương 3 tác giả cũng trình bày các bài toán trong các đề thi HSG quốc gia và Olympic quốc tế được sử dụng kiến thức liên quan.

Các kết quả về lý thuyết cũng như bài tập liên quan đến nội dung của luận văn được trích dẫn từ các tài liệu [1]-[8].

Trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành nội dung luận văn tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu là người Thầy trực tiếp hướng dẫn cùng các thầy cô trong Khoa Toán-Tin của trường ĐHKH-ĐHTN đã hết lòng giúp đỡ để tôi hoàn thành luận văn của mình. Chắc chắn luận văn còn những thiếu sót nhất định tôi rất mong được quý Thầy Cô và độc giả góp ý để luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2017.

Tác giả

Trần Văn Huấn

Chương 1. Các tính chất cơ bản liên quan đến đa thức lượng giác

1.1 Các đẳng thức lượng giác cơ bản

1.1.1 Tính chất của hàm số lượng giác

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1 (Tính chẵn lẻ, xem [1], [6])**.** Hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ được gọi là hàm số chẵn trên K $(K \subset D(f))$ nếu:

$$\begin{cases} x \in K \Rightarrow -x \in K \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \qquad (\forall x \in K)$$

$f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên K nếu

$$\begin{cases} x \in K \Rightarrow -x \in K \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \qquad (\forall x \in K)$$

Nhận xét 1.1. Dễ dàng kiểm tra được các hàm số $y = \sin x,\ y = \tan x,\ y = \cot x$ là các hàm số lẻ và hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên tập xác định của nó.

Định nghĩa 1.2 (Tính tuần hoàn, xem [1], [6])**.**

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ T $(T > 0)$ trên K nếu $K \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in K \Rightarrow x \pm T \in K \\ f(x+T) = f(x),\ \forall x \in K \end{cases}$$

- Cho $f(x)$ là một hàm số tuần hoàn trên K. Khi đó T $(T > 0)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T.

Nhận xét 1.2. Dễ dàng ta thấy:
Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Định nghĩa 1.3.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ a $(a > 0)$ trên K nếu $K \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in K \Rightarrow x \pm a \in K \\ f(x+a) = -f(x),\ \forall x \in K. \end{cases}$$

- Nếu $f(x)$ là một hàm số phản tuần hoàn chu kỳ b trên K mà không là hàm phản tuần hoàn với bất kỳ chu kỳ nào bé hơn b trên K thì b được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên K.

Định nghĩa 1.4 (Xem [1], [6])**.** Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (nhân tính) chu kỳ a $(a \notin \{-1, 0, 1\})$ trên K nếu $K \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in K \Rightarrow a^{\pm 1} x \in K \\ f(ax) = f(x),\ \forall x \in K. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.5 (Xem [1], [6])**.** Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn (nhân tính) chu kỳ a $(a \notin \{-1, 0, 1\})$ trên K nếu $K \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in K \Rightarrow a^{\pm 1} x \in K \\ f(ax) = -f(x),\ \forall x \in K. \end{cases}$$

1.1.2 Đẳng thức liên quan đến hàm cosin

Ví dụ 1.1. Hệ thức đại số với công thức

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^2 - 1.$$

Ví dụ 1.2. Hệ thức đại số với công thức

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right].$$

hay

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) \quad (\text{Với } x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ a \neq 0).$$

Ví dụ 1.3. Hệ thức đại số với công thức

$$\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = 16\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^5 - 20\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 + 5\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]$$

hay

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) \quad (\text{Với } x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ a \neq 0).$$

1.1.3 Đẳng thức liên quan đến hàm sin

Từ công thức Euler, ta thu được hệ thức

$$i\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}.$$

Từ hệ thức này ta có các công thức đối với hàm sin sang các đẳng thức đại số sau:

Ví dụ 1.4. Công thức nhân 3:

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t.$$

Từ đó ta có công thức:

$$i\sin i(3t) = 3(i\sin it) + 4(i\sin it)^3$$

Đẳng thức đại số ứng với công thức trên là đẳng thức

$$\frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) = 3\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right] + 4\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^3$$

hay

$$4x^3 + 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) \quad \left(\text{Với } x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right),\ a \neq 0\right).$$

Ví dụ 1.5. Từ công thức

$$\sin 5t + \sin t = 2\sin 3t(1 - 2\sin^2 t).$$

Ta có đẳng thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5 - \frac{1}{a^5}\right) + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)\right]\left[1 - 2\left(\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right)^2\right].$$

1.2 Phương trình lượng giác cơ bản

1.2.1 Dạng và phương pháp giải

Giả sử $u,\ v$ là các biểu thức theo $x : u = u(x),\ v = v(x)$. Khi đó ta có

1. $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z});$

2. $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z});$

3. $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u,\ v \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ u = v + k\pi \end{cases} \qquad (k,\ l \in \mathbb{Z});$

4. $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u,\ v \neq l\pi \\ u = v + k\pi \end{cases} \qquad (k,\ l \in \mathbb{Z}).$

1.2.2 Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1.6. Giải phương trình

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0. \tag{1.1}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}(1.1) &\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&3x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ &3x-\frac{\pi}{3}=\pi-x-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{aligned}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ &x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Ví dụ 1.7. Giải phương trình

$$\sin(4x-5)+\cos(x+3)=0. \tag{1.2}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}(1.2) &\Leftrightarrow \sin(4x-5)=-\cos(x+3)\\ &\Leftrightarrow \sin(4x-5)=\cos(\pi-x-3)\\ &\Leftrightarrow \sin(4x-5)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi+x+3\right)\\ &\Leftrightarrow \sin(4x-5)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x+3\right)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&4x-5=-\frac{\pi}{2}+x+3+k2\pi\\ &4x-5=\pi+\frac{\pi}{2}-x-3+k2\pi\end{aligned}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}+k\frac{2\pi}{3}\\ &x=\frac{3\pi}{10}+\frac{2}{5}+k\frac{2\pi}{5}\end{aligned}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$